Вписанные углы

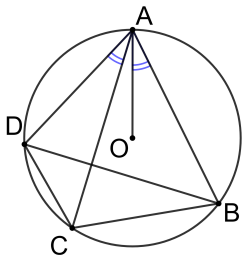
Вписанный угол и угол между касательной и хордой равны половине заключённой в них дуги. Касательная перпендикулярна радиусу в точке касания.

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключённых в нём и в вертикальном к нему угле. Для угла между секущими с вершиной вне окружности берут полуразность дуг между дальними и между ближними точками пересечения.

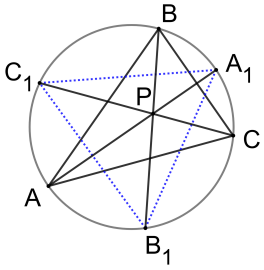
Выпуклый четырёхугольник вписан тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

1. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке; K, L, M и N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

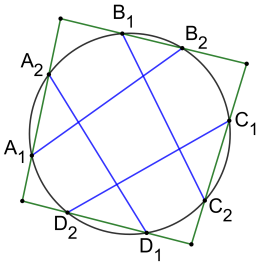
2. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O, причём точка O лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. Кроме того, известно, что $\angle BAO = \angle DAC$. Докажите, что диагонали AC и BD перпендикулярны.



3. Внутри остроугольного треугольника ABC взята такая точка P, что $\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle BAC + 60°$ и $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Прямые AP, BP и CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.



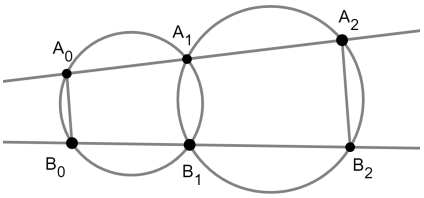
4. На окружности взяты точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ и D_2 в указанном порядке, причём $A_1B_2 = B_1C_2 = C_1D_2 = D_1A_2$. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2, можно вписать в окружность.



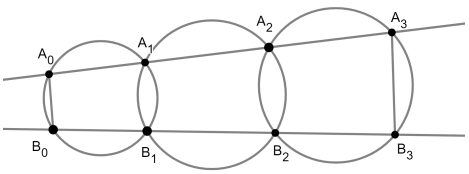
5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, пересекающая отрезок PQ, пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

6. Рассмотрим цепочку окружностей.

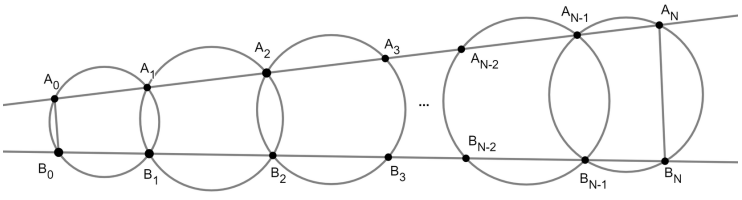
(а) Две окружности и две прямые расположены, как на рисунке. Докажите, что $A_0B_0 \parallel A_2B_2$.



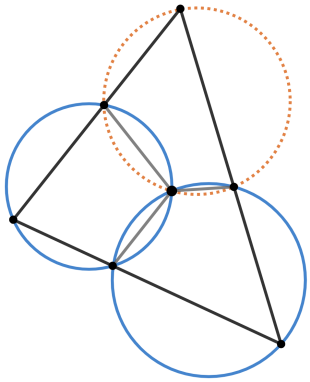
(б) Три окружности и две прямые расположены, как на рисунке (центры окружностей не обязательно лежат на одной прямой). Докажите, что точки A_0, B_0, A_3 и B_3 лежат на одной окружности.



(в) На рисунке N окружностей и две прямые. Центры окружностей не обязательно лежат на одной прямой. Что можно сказать о точках A_0, B_0, A_N и B_N?

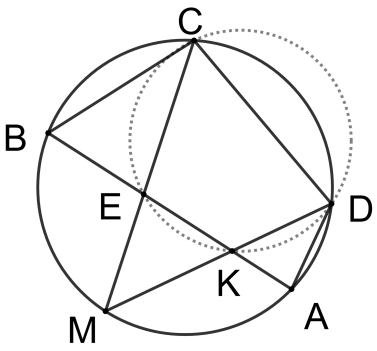


7. *Точка Микеля.* На сторонах треугольника взяли по точке и соединили их с точкой внутри треугольника. Докажите, что если два из трёх получившихся четырёхугольников вписанные, то третий тоже вписанный.

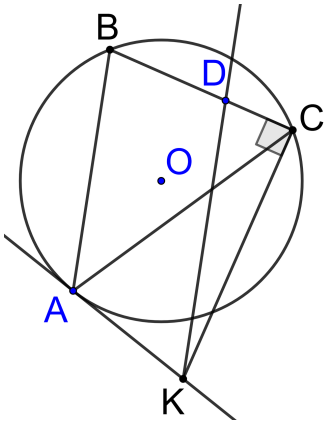


8. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к описанной окружности треугольника ABK параллельна CD.

9. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB, не содержащей C и D. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K соответственно. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырёхугольник.



10. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На касательной в точке A к этой окружности выбрана такая точка K, что $\angle KCB = 90°$. Через точку K проведена прямая, параллельная AB и пересекающая отрезок BC в точке D. Докажите, что точки A, D и O лежат на одной прямой.



11. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его сторон AB и CD пересекаются в точке K, а продолжения сторон BC и AD — в точке N. Докажите, что биссектрисы углов BKC и ANB перпендикулярны.

12. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.