Квадратные уравнения

Теоретическое напоминание.

Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, его дискриминант равен

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D > 0$, уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, уравнение имеет один (двукратный) корень $x = -\frac{b}{2a}$; если $D < 0$, действительных корней нет.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

1. Используя симметрию параболы, выведите формулу для координат её вершины, если

$$y = ax^2 + bx + c.$$

2. Решите уравнение

$$x^2 + 2021x - 2022 = 0.$$

3. Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2020$. Решите уравнение

$$f(3 - x) = f(3x - 1).$$

4. Квадратный трёхчлен $px^2 + qx + r$ имеет два корня. Докажите, что трёхчлен

$$3px^2 + 2(p + q)x + (q + r)$$

также имеет два корня.

5. Два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов.

6. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \cdots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})?$$

7. Дискриминант приведённого квадратного уравнения с корнями x_1 и x_2 равен 18, а дискриминант приведённого квадратного уравнения с корнями x_3 и x_4 равен 50. Какое значение может принимать дискриминант приведённого квадратного уравнения с корнями $x_1 + x_3$ и $x_2 + x_4$?

8. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 2x - 5 = 0$, найдите:

(а) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$;

(б) $x_1^3 + x_2^3$.

9. Квадратный трёхчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v, а квадратный трёхчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\dfrac{1}{u}$ и $\dfrac{1}{v}$. Найдите p и q.

10. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни $\dfrac{x_1}{x_2}$ и $\dfrac{x_2}{x_1}$. Найдите p.

11. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2x - 6 = 0$. Найдите

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2.$$

12. Числа p и q — различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2 - ax + b = 0$, а числа a и b — различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Чему могут быть равны эти числа?