Уравнения в целых числах

1. Решите в целых числах уравнение $xy = x + y + 3$.

2. Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата его цифры единиц, увеличенной в 7 раз.

3. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

4. Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из двух чисел и B из тринадцати чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A.

5. Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc.

6. Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

7. Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

8. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 + 8x + 5y = 7.$$

9. Найдите периметр выпуклого многоугольника, множество вершин которого в координатной записи совпадает с множеством целочисленных пар решений уравнения

$$x^2 + xy = x + 2y + 9.$$

10. Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$6m^2 - 2n^2 + mn = 3.$$

11. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1).$$

12. Найдите все пары целых чисел (x, y), при которых

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0.$$